

---

---

## The Feuerbach circle and the other remarkable circles of the cyclic polygons

---

---

Blas Herrera Gómez

Blas Herrera is professor at the Computer Engineering and Mathematics Department at the Universitat Rovira i Virgili (Tarragona, Spain). He obtained his Ph.D. in 1994 at the Universitat Autònoma de Barcelona (Barcelona, Spain) about Differential Geometry.

### 1 Introduction

It is very well known that a triangle  $ABC$  has its Feuerbach circle (nine point circle). The Feuerbach circle is a circle that passes through the midpoints  $E_A$ ,  $E_B$ , and  $E_C$  of the segments that join the vertices and the orthocenter  $H$ . These points are commonly referred to as the Euler points; we will refer the center of Feuerbach circle as  $F$ . Also, the following properties of the Feuerbach circle are very well-known; see Fig. 1:

The orthocenter  $H$ , triangle centroid  $G$ , circumcenter  $O$ , and the Feuerbach center  $F$  are aligned (Euler line). In fact 243 Kimberling centers are lying on the Euler line.

The cross ratio  $(O, F, G, H) = -1$ ; that is:  $O, F, G$ , and  $H$  form a harmonic range with  $OG = \frac{1}{2}GH$ ,  $OG = \frac{1}{3}OH$ ,  $OF = \frac{1}{2}OH$ ,  $FG = \frac{1}{6}HO$ . The simple ratio  $(O, H, F) = \frac{OF}{HF} = -1$ .

Der Feuerbachkreis eines Dreiecks geht bekanntlich durch die Mittelpunkte der Seiten, der Fusspunkte der Höhen sowie durch die Eulerpunkte des Dreiecks. Darüber hinaus liegen der Mittelpunkt des Feuerbachkreises, der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks auf einer Geraden, der sogenannten Eulergeraden. In dem nachfolgenden Beitrag verallgemeinert der Autor diesen Sachverhalt auf zyklische  $N$ -Ecke ( $N \geq 3$ ), d.h. konvexe  $N$ -Gone, die einen Umkreis besitzen. Dementsprechend finden sie für das zur Diskussion stehende zyklische  $N$ -Eck unter anderem ein Analogon des Feuerbachkreises, dessen Zentrum zusammen mit dem Umkreiszentrum und dem Schwerpunkt des  $N$ -Ecks auf einer Geraden liegen.